UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MATEMÁTICAS I (MA-1111)

Elaborado por
Samuel Alonso
14-10028
Ing. Telecom

6 de marzo de 2017

Límites, Límites por Definición, Continuidad, Teorema de Valor Intermedio

Resolución Segundo Parcial 2015 Enero-Marzo

1. Resuelva los siguiente límites

$$a)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\cos x - \sin x} \qquad b)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} \qquad c)\ \lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x^2-4} \qquad d)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^4+x^3+x}{x^2-2x}$$

a) De forma directa, puede expandirse el numerador de la fracción y operar para obtener el límite.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}}{\cos x - \sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sec x = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

b) Para calcular el límite, consideremos al denominador como el cuadrado de una expresión, recordando colocar el signo apropiado debido a la naturaleza de la función raíz cuadrada.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{(1+x)^2}}.$$

Luego,

$$\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^2+1}{(1+x)^2}},$$

y factorizando un término x^2 del numerador y del denominador, se obtiene

$$\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{1+x^{-2}}{(1+x^{-1})^2}}.$$

Ahora, como $1 + x^{-2} \to 1$ y $1 + x^{-1} \to 1$ a medida que $x \to -\infty$, entonces

$$\frac{1 + x^{-2}}{(1 + x^{-1})^2} \to 1 \text{ a medida que } x \to -\infty,$$

y por ende

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{1 + x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{1 + x^{-2}}{(1 + x^{-1})^2}} = -1.$$

c) Debido a que la función valor absoluto del numerador cambia justamente en el punto de estudio, consideremos los límites laterales en casos separados. Para $x \to 2^-$ tenemos que

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{4},$$

mientras que para $x \to 2^+$,

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}.$$

Puesto que

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x^2 - 4} \neq \lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x^2 - 4},$$

entonces puede asegurarse que el límite no existe.

d) Tomando factor común x del numerador y del denominador, obtenemos una expresión que puede ser evaluada directamente.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 + x^3 + x}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x - 2} = -\frac{1}{2}.$$

2. Demuestre que la ecuación

$$x + 2\cos x = 0$$

tiene al menos una solución real.

Consideremos una función f tal que $f(x) = x + 2\cos x$. Primero, véase que $f(x)$ es continua, puesto que es la suma de dos funciones continuas. Luego, fácilmente puede observarse que $f(\pi/2) = \pi/2$ y que $f(-\pi/2) = -\pi/2$. Lo importante de esto es que $f(\pi/2) > 0$ y $f(-\pi/2) < 0$. Debido a lo anterior, y como f es continua, mediante el Teorema del Valor Intermedio se obtiene que $f(c) = 0$ para algún $c \in (-\pi/2, \pi/2)$. Esto demuestra que existe al menos una solución real para $x + 2\cos x = 0$, ya que tal c satisface la ecuación y su existencia está garantizada por el teorema.

3. Encuentre valores para m y b tales que la función

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, \ x < \pi \\ mx + b, \ x \geq \pi \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = \pi$.

Para que la función a trozos f sea continua y derivable en el punto especificado deben cumplirse, en principio, las condiciones de que

$$\lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi) \qquad \text{y que} \qquad \exists \lim_{h \to 0} \frac{f(\pi + h) - f(\pi)}{h},$$

las cuales, de ser supuestas como satisfechas, implican la existencia de los límites laterales respectivos. Para garantizar que f sea continua en π, basta con tomar

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} f(x).$$

Es decir, que

$$\sin \pi = m\pi + b = 0.$$

Puesto que es conocida tanto la derivada de la función seno como la de una recta arbitraria, para garantizar que f sea derivable en π basta con tomar además que

$$\cos \pi = m = -1.$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad,

$$m\pi + b = 0 \implies b = \pi.$$

Finalmente, los valores para m y b resultan

$$m = -1 \qquad \text{y} \qquad b = \pi,$$

y f puede ser definida continua y derivable en π mediante

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, \ x < \pi \\ \pi - x, \ x \geq \pi \end{cases} .$$

4. Demuestre, utilizando la definición de límite, que

$$\lim_{x \to 5} \sqrt{x + 4} = 3.$$

El objetivo es mostrar que para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|x - 5| < \delta \implies$

$|f(x) - 3| < \epsilon$. Comencemos por considerar $|\sqrt{x+4} - 3| < \epsilon$. Multiplicando a ambos lados de la desigualdad por $|\sqrt{x+4} + 3|$ obtenemos

$$|(x+4) - 9| = |x - 5| < \epsilon|\sqrt{x+4} + 3|.$$

De esta manera hemos logrado hacer que tanto ϵ como δ acoten, por así decirlo, al término $|x - 5|$. Ahora, si escogemos un δ arbitrario $\delta = 1$, observamos que

$$|x - 5| < \delta = 1 \implies 4 < x < 6,$$

lo cual permite ahora hallar un valor mínimo para el término $|\sqrt{x+4} + 3|$. En particular

$$|x - 5| < \epsilon|2\sqrt{2} + 3| < \epsilon|\sqrt{x+4} + 3|.$$

Esto significa entonces que basta con tomar δ como el menor número entre los dos valores $\epsilon|2\sqrt{2}+3|$ y 1 tal que $|x-5| < \delta \implies |f(x)-3| < \epsilon$, puesto que si se escoge ϵ lo suficientemente grande, sabemos que $\delta = 1$ satisface la condición, y si se escoge un epsilon menor, tal que $\delta = 1$ no satisfaga la condición, basta con tomar $\delta \leq \epsilon|2\sqrt{2}+3|$. Esto demuestra lo afirmado, y δ puede expresarse como

$$\delta = \text{mín}\left(1, \epsilon|2\sqrt{2} + 3|\right).$$

Nota: Este material fue elaborado por Samuel Alonso con ejercicios obtenidos del segundo parcial de Enero-Marzo del 2015, y fue realizado para el uso de toda la comunidad académica.

Samuel Alonso
Carnet: 14-10028
Ingeniería en Telecomunicaciones
Twitter: @zickpic

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com